

PRILOG: Dopusštena pravila prirodne dedukcije (1/2)

- Opravdanja se sastoje od triju podataka, a to su: simbol veznika, slovo u ili i (za uvođenje/isključenje), te jedan ili više brojeva ili brojevnih raspona. Te tri informacije mogu biti odijeljene razmakom, zarezom, kosom crtom ili nekako drugačije. Poredak tih triju informacija proizvoljan je (to ne znači da je poredak brojeva proizvoljan). Iznimno, reiteracija (opetovanje) ne sadržava slovo u ili i.
- Kod nekih je pravila poredak premisa iz kojih slijede proizvoljan, što je signalizirano **zvjezdicom** (*). Kod takvih se pravila iznimno dopušta i proizvoljan poredak u zapisu brojeva u opravdanju. Primjerice, pri uvođenju konjunkcije redak rednog broja k mogao se pojaviti prije retka rednog broja j , a u opravdanju je u oba slučaja moglo pisati $\wedge u, j, k$ ili $\wedge u, k, j$. U svim četirima slučajevima pravilo nazivamo $\wedge u$.
- Tri točkice signaliziraju da su na označenom mjestu možda i dodatni redci osim onih upisanih.

Reiteracija (opetovanje).

j		A	
		\vdots	
		A	re., j (ili op., j)

Uvođenje konjunkcije. *

j		A	
		\vdots	
k		B	
		\vdots	
		$A \wedge B$	$\wedge u, j, k$

Uvođenje disjunkcije.

j		A		j		B	
		\vdots				\vdots	
		$A \vee B$	$\vee u, j$			$A \vee B$	$\vee u, j$

Uvođenje kondicionala.

j			A	pretp.
			\vdots	
k			B	
			$A \rightarrow B$	$\rightarrow u, j-k$

Uvođenje bikondicionala.

j			A	pretp.
			\vdots	
k			B	
m			B	pretp.
			\vdots	
n			A	
			$A \leftrightarrow B$	$\leftrightarrow u, j-k, m-n$

Uvođenje negacije.

j			A	pretp.
			\vdots	
k			B	
l			$\neg B$	
			$\neg A$	$\neg u, j-l$

Isključenje konjunkcije.

j		$A \wedge B$		j		$A \wedge B$	
		\vdots				\vdots	
		A	$\wedge i, j$			B	$\wedge i, j$

Isključenje disjunkcije.

e		$A \vee B$	
		\vdots	
j		A	pretp.
		\vdots	
k		C	
m		B	pretp.
		\vdots	
n		C	
		C	$\vee i, e, j\text{--}k, m\text{--}n$

Isključenje kondicionala. *

j		$A \rightarrow B$	
		\vdots	
k		A	
		\vdots	
		B	$\rightarrow i, j, k$

Isključenje bikondicionala. *

j		$A \leftrightarrow B$		j		$A \leftrightarrow B$	
		\vdots				\vdots	
k		A		k		B	
		\vdots				\vdots	
		B	$\leftrightarrow i, j, k$			A	$\leftrightarrow i, j, k$

Isključenje negacije.

j			$\neg A$	pretp.
			\vdots	
k			B	
l			$\neg B$	
			A	$\neg u, j-l$

PRILOG: Dopuštena pravila prirodne dedukcije (2/2)

- U nastavku navodimo pravila za kvantifikatore (količitelje). Rabimo logiku prvog reda bez funkcijskih simbola. Pravila su (zbog preciznosti) opisana apstraktnije nego što ste možda učili u školi, no to su suštinski ista pravila. **Na dnu je primjer konkretnog dokaza.**
- Neka je A formula koja možda sadržava pojave (javljanja, nastupe) neke varijable x .
 - Označimo s $A(t/x)$ formulu jednaku formuli A , osim što je **svaka** slobodna pojava varijable x u A zamijenjena pojavom (pseudo)konstante t .
- Neka je A formula koja možda sadržava pojave neke (pseudo)konstante t .
 - Označimo s $A(x/t)$ formulu jednaku formuli A , osim što je **svaka** pojava (pseudo)konstante t u A zamijenjena pojavom varijable x .
 - Označimo s $A(x//t)$ formulu jednaku formuli A , osim što je **nula ili više** pojava (pseudo)konstante t u A zamijenjeno pojavom varijable x .

Uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora.

j		A	
		\vdots	
		$\exists x A(x//t)$	$\exists u, j$

Ako formula A već sadržava kvantifikatore nad varijablom x , pojave t u A ne smiju biti u dosegu tih kvantifikatora.

Uvođenje univerzalnog kvantifikatora.

j		A	
		\vdots	
		$\forall x A(x/t)$	$\forall u, j$

Pseudokonstanta t se pritom ne smije javljati u pretpostavci nekog (pod)dokaza koji još nije završen. Ako formula A već sadržava kvantifikatore nad varijablom x , pojave t u A ne smiju biti u dosegu tih kvantifikatora.

Isključenje egzistencijalnog kvantifikatora.

j		$\exists x A$	
		\vdots	
k		$A(t/x)$	pretp.
		\vdots	
m		B	
		B	$\exists i, j, k-m$

Pseudokonstanta t se ne smije javljati u formulama u redcima ispred retka k , niti u formuli B .

Isključenje univerzalnog kvantifikatora.

j		$\forall x A$	
		\vdots	
		$A(t/x)$	$\forall i, j$

Dajemo primjer dokaza da je formula $(\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy) \vee Pc$ teorem. Dokaz je duži no što je potrebno, kako bismo demonstrirali primjenu svih pravila za kvantifikatore.

1		$\exists x Rxx$	pretp.
2		Raa	pretp.
3		$\exists y Ray$	$\exists u, 2$
4		$\exists x \exists y Rxy$	$\exists u, 3$
5		$\exists x \exists y Rxy$	$\exists i, 1, 2-4$
6		$\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy$	$\rightarrow u, 1-5$
7		$(\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy) \vee Pb$	$\vee u, 6$
8		$\forall z ((\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy) \vee Pz)$	$\forall u, 7$
9		$(\exists x Rxx \rightarrow \exists x \exists y Rxy) \vee Pc$	$\forall i, 8$